RECHERCHES
SUR LES PRINCIPES MATHÉMATIQUES
DE LA THÉORIE DES RICHESSES

PRÉFACE

La science à laquelle on donne le nom d'Économie politique, et qui a si fort occupé les esprits depuis un siècle, est aujourd'hui plus répandue que jamais. Elle est entrée avec la politique proprement dite en partage de ces grands journaux qui sont le plus puissant instrument de publicité ; mais on a tant été fatigué de théories et de systèmes, que maintenant on veut, comme on dit, du positif, c'est-à-dire dans cette matière, des relevés de douane, des documents statistiques, des renseignements administratifs, propres à éclairer par l'expérience ces questions importantes qui s'agitent devant le pays, et auxquelles toutes les classes de la société sont si directement intéressées.

Je n'ai rien à objecter à cette disposition des esprits : elle est bonne, elle est conforme aux lois qui dirigent le développement de toutes les branches des sciences. Je ferai seulement observer que la théorie ne doit pas être confondue avec les systèmes, quoique nécessairement, dans l'enfance des sciences, l'esprit de système se charge d'ébaucher les théories. J'ajouterai que la théorie doit toujours avoir sa part, si petite qu'on veuille la lui faire, et qu'il doit être permis à un homme de ma profession, plus qu'à tout autre, d'envisager exclusivement sous le point de vue théorique un sujet d'intérêt général, qui a tant de faces diverses.

Mais le titre de cet ouvrage n'annonce pas seulement des recherches théoriques, il indique aussi que j'ai l'intention d'y appliquer les formes et les symboles de l'analyse mathématique : or c'est-là, je le confesse, un plan qui doit m'attirer tout d'abord la réprobation des théoriciens accrédités. Tous se sont élevés comme de concert contre l'emploi des formes mathématiques, et il serait sans doute difficile aujourd'hui de vaincre un préjugé que de bons esprits, tels que Smith et d'autres écrivains plus modernes, ont contribué à affermir. La raison paraît en être, d'une part, dans le faux point de vue sous lequel la théorie a été envisagée par le petit nombre de ceux qui ont voulu essayer d'y appliquer l'analyse mathématique ; d'autre part, dans la fausse idée que se sont formée de cette analyse, des esprits très judicieux d'ailleurs, et très versés dans les matières d'économie politique, mais à qui les sciences mathématiques étaient à peu près étrangères.

Les essais dont il s'agit ici sont restés fort obscurs, et je n'ai pu les connaître que par leurs titres, à l'exception d'un seul, *les Principes d'Économie politique*, par *Canard*, petit ouvrage publié en l'an X, et couronné par l'Institut. Ces prétendus principes sont si radicalement faux, et l'application en est tellement erronée, que le suffrage d'un corps éminent n'a pu préserver l'ouvrage de l'oubli. On conçoit aisément que des essais de cette nature n'aient pas réconcilié avec l'algèbre des économistes tels que Say et Ricardo.

J'ai dit que les auteurs spéciaux dans ces matières semblent d'ailleurs s'être fait une idée fausse de la nature des applications de l'analyse mathématique à la théorie des richesses. On s'est figuré que l'emploi des signes et des formules ne pouvait avoir d'autre but que celui de conduire à des calculs numériques ; et comme on sentait bien que le sujet répugne à cette détermination numérique des valeurs d'après la seule théorie, on en a conclu que l'appareil des formules était, sinon susceptible d'induire en erreur, au moins oiseux et pédantesque. Mais les personnes versées dans l'analyse mathématique savent qu'elle n'a pas seulement pour objet de calculer des nombres ; qu'elle est aussi employée à trouver des relations entre des grandeurs que l'on ne peut évaluer numériquement, entre des *fonctions* dont la loi n'est pas susceptible de s'exprimer par des symboles algébriques. C'est ainsi que la théorie des probabilités fournit la démonstration de propositions très importantes, quoiqu'on ne puisse évaluer numériquement, sans le secours de l'expérience, les probabilités des événements contingents, si ce n'est dans des questions de pure curiosité, comme celles qui se rapportent à certains jeux de hasard. C'est ainsi encore que la mécanique rationnelle fournit à la mécanique pratique des théorèmes généraux d'une application très utile, bien que, dans les cas les plus ordinaires, il faille de toute nécessité recourir à l'expérience, pour les déterminations numériques que la pratique réclame.

L'emploi des signes mathématiques est chose naturelle toutes les fois qu'il s'agit de discuter des relations entre des grandeurs ; et lors même qu'ils ne seraient pas rigoureusement nécessaires, s'ils peuvent faciliter l'exposition, la rendre plus concise, mettre sur la voie de développements plus étendus, prévenir les écarts d'une vague argumentation, il serait peu philosophique de les rebuter, parce qu'ils ne sont pas également familiers à tous les lecteurs et qu'on s'en est quelquefois servi à faux.

Il y a des auteurs, tels que Smith et Say, qui ont écrit sur l'économie politique en conservant à leur style tous les agréments de la forme purement littéraire ; mais il y en a d'autres, comme Ricardo, qui, abordant des questions plus abstraites ou recherchant une plus grande précision, n'ont pu éviter l'algèbre, et n'ont fait que la déguiser sous des calculs arithmétiques d'une prolixité fatigante. Quiconque connaît la notation algébrique, lit d'un clin d'œil dans une équation le résultat auquel on parvient péniblement par des règles de fausse position, dans l'arithmétique de Banque.

Je me propose d'établir dans cet essai que la solution des questions générales auxquelles donne lieu la théorie des richesses, dépend essentiellement, non pas de l'algèbre élémentaire, mais de cette branche de l'analyse qui a pour objet des fonctions arbitraires, assujetties seulement à satisfaire à certaines conditions. Comme il ne s'agit que de conditions fort simples, les premières notions de calcul différentiel et intégral suffisent pour l'intelligence de ce petit traité. Aussi, tout en craignant qu'il ne paraisse beaucoup trop abstrait à la plupart des personnes qui s'occupent par goût de ces matières, je n'ose espérer qu'il mérite de fixer l'attention des géomètres de profession, à moins qu'ils n'y découvrent le germe de questions plus dignes de leur sagacité.

Mais il y a, en France surtout, grâce à une école célèbre, une classe nombreuse d'hommes qui, après avoir fait de fortes études dans les. sciences mathématiques, ont dirigé leurs travaux vers les applications de ces sciences qui intéressent particulièrement la société. Les théories sur la richesse sociale doivent attirer leur attention et en s'en occupant ils doivent éprouver le besoin, comme je l'ai éprouvé moi-même, de fixer par les signes qui leur sont familiers une analyse si vague et souvent si obscure chez les auteurs qui ont jugé à propos de se contenter des ressources de la langue commune. En supposant qu'ils soient amenés par leurs réflexions à entrer dans cette voie, j'espère que mon livre leur sera de quelque utilité et leur abrègera le travail.

Peut-être remarqueront-ils dans l'exposé des premières notions sur la concurrence, sur le concours des producteurs, certaines relations assez curieuses, à les envisager sous le point de vue purement abstrait, indépendamment du but d'application que l'on se propose.

Je n'ai point prétendu faire un traité dogmatique et complet sur l'économie politique : j'ai laissé les questions où l'analyse mathématique n'a aucune prise, et celles qui me paraissent déjà parfaitement éclaircies. J'ai supposé que ce livre ne tomberait qu'entre les mains de lecteurs déjà au courant de ce qui se trouve dans les ouvrages les plus répandus sur ces matières.

Bien loin d'avoir songé à écrire dans un esprit de système et pour me ranger sous les bannières d'un parti, je pense qu'il reste un pas immense à franchir pour passer de la théorie aux applications gouvernementales ; je trouve que la théorie ne perd rien de son prix, en restant ainsi préservée du contact de la polémique passionnée ; et je crois que si cet essai pouvait être de quelque utilité pratique, ce serait principalement en faisant bien sentir tout ce qui nous manque pour résoudre, en pleine connaissance de cause, une foule de questions que l'on tranche hardiment tous les jours.

Chapitre 4

DE LA LOI DU DÉBIT

20 Pour asseoir les fondements de la théorie des valeurs échangeables, nous ne remonterons pas avec la plupart des écrivains spéculatifs jusqu'au berceau de l'espèce humaine ; nous n'entreprendrons d'expliquer ni l'origine de la propriété, ni celle de l'échange ou de la division du travail. Tout cela appartient sans doute à l'histoire de l'homme, mais n'est d'aucune influence sur une théorie qui ne peut devenir applicable qu'à une époque de civilisation très avancée, à une époque où (pour parler le langage des géomètres) la part d'action des circonstances *initiales* est entièrement éteinte.

Nous n'invoquerons qu'un seul axiome, ou, si l'on veut, nous n'emploierons qu'une seule hypothèse, savoir que chacun cherche à tirer de sa chose ou de son travail la plus grande valeur possible. Mais en déduisant les conséquences rationnelles de ce principe, nous essaierons de fixer mieux qu'on ne l'a fait les éléments, les données que l'observation seule peut fournir. Malheureusement, ce point fondamental est celui que les théoriciens se sont à peu près accordés à présenter, nous ne dirons pas d'une manière fausse, mais d'une manière qui n'offre réellement aucun sens.

« Le prix des choses, a-t-on dit d'une voix presque unanime, est en raison inverse de la quantité offerte, et en raison directe de la quantité demandée. » Que l'on manque de moyens statistiques, pour évaluer numériquement avec exactitude, soit la quantité offerte, soit la quantité demandée, cela n'a jamais été mis en doute, et n'empêcherait pas qu'on ne pût tirer du principe des conséquences générales, susceptibles d'être utilement appliquées. Mais le principe même en quoi consiste-t-il ? Veut-on dire que, dans le cas ou une quantité double de la denrée est mise en vente, le prix baisse de moitié ? Alors, il faudrait s'expliquer plus simplement, et se borner à dire que le prix est en raison inverse de la quantité offerte. Mais le principe, devenu par là intelligible, serait faux : car, en général, de ce qu'il s'est vendu 100 unités d'une denrée au prix de 20 francs, ce n'est pas une raison pour que, dans le même laps de temps et les mêmes circonstances, il s'en vende 200 unités au prix de 10 francs. Quelquefois il s'en débitera moins : souvent il s'en débitera bien davantage.

En outre, qu'entend-on par la quantité demandée ? Ce n'est sans doute pas celle qui se débite effectivement sur la demande des acheteurs ; car, alors il résulterait du prétendu principe la conséquence absurde en général qu'on débite d'autant plus d'une denrée qu'elle est plus chère. Si, par demande, on n'entend qu'un désir vague de posséder la chose, abstraction faite du *prix limité* que chaque demandeur sous-entend dans sa demande, il n'y a guère de denrée dont on ne puisse considérer la demande comme indéfinie ; et, si l'on doit tenir compte du prix auquel chaque demandeur consent à acheter, du prix auquel chaque fournisseur consent à vendre, que signifie le prétendu principe ? Ce n'est pas, nous le répétons, une proposition erronée, c'est une proposition dénuée de sens : aussi, tous ceux qui se sont accordés à la proclamer, se sont-ils accordés pareillement à n'en faire aucun usage. Essayons de nous rattacher à des principes moins stériles.

Une denrée est ordinairement d'autant plus demandée qu'elle est moins chère. Le débit ou la demande (car pour nous ces deux mots sont synonymes, et nous ne voyons pas sous quel rapport la théorie aurait à tenir compte d'une demande qui n'est pas suivie de débit), le débit ou la demande, disons-nous, croît en général quand le prix décroît.

Nous ajoutons, comme un correctif, ces mots *en général* ; effectivement, il y a des objets de fantaisie et de luxe qui ne sont recherchés qu'en raison de leur rareté et de l'élévation de leur prix, qui en est la suite. Si l'on parvenait à opérer à peu de frais la cristallisation du carbone, et à livrer pour un franc le diamant qui en vaut mille aujourd'hui, il n'y aurait rien d'étonnant à ce que le diamant cessât de servir aux parures et d'être un objet de commerce. Dans ce cas, une baisse prodigieuse de prix anéantirait presque la demande. Mais les denrées de cette nature jouent un rôle si peu important dans l'économie sociale, que l'on peut se dispenser d'avoir égard à la restriction dont nous parlons.

La demande pourrait être en raison inverse du prix ; ordinairement, elle croît ou elle décroît dans une proportion beaucoup plus rapide : observation qui s'applique surtout au plus grand nombre des produits manufacturés. D'autres fois, au contraire, la variation de la demande est moins rapide ; ce qui paraît (chose singulière) s'appliquer également et aux choses les plus nécessaires, et aux choses les plus superflues. Le prix des violons, celui des lunettes astronomiques baisserait de moitié, que probablement la demande ne doublerait pas ; car cette demande est déterminée par le nombre de ceux qui cultivent l'art ou la science auxquels ces instruments se rapportent ; qui ont les dispositions requises, le loisir de les cultiver, le moyen de payer les maîtres et de faire les autres dépenses nécessaires, à la suite desquels le prix des instruments ne figure que comme un accessoire. Le bois de chauffage, qui est au contraire une denrée des plus utiles, pourrait doubler de prix, par suite des progrès du défrichement ou de l'accroissement de la population, probablement bien avant que la consommation annuelle de bois eût été réduite de moitié, un grand nombre de consommateurs étant disposés à retrancher sur les autres dépenses plutôt que de se passer de bois.

21 Admettons donc que le débit ou la demande annuelle D est, pour chaque denrée, une fonction particulière F(p) du prix p de cette denrée. Connaître la forme de cette fonction, ce serait connaître ce que nous appelons *la loi de la demande ou du débit*. Elle dépend évidemment du mode d'utilité de la chose, de la nature des services qu'elle peut rendre ou des jouissances qu'elle procure, des habitudes et des mœurs de chaque peuple, de la richesse moyenne et de l'échelle suivant laquelle la richesse est répartie.

Puisque tant de causes morales, et qu'on ne peut énumérer ni mesurer, influent sur la loi de la demande, il est clair qu'on ne doit pas s'attendre à ce que cette loi puisse être exprimée par une formule algébrique, pas plus que la loi de mortalité et que toutes celles dont la détermination rentre dans le domaine de la statistique, de ce qu'on appelle également l'arithmétique sociale. Ce serait donc à l'observation à fournir les moyens de dresser entre des limites convenables une table des valeurs correspondantes de D et de p ; après quoi l'on construirait, par les méthodes connues d'interpolation ou par les procédés graphiques, une formule empirique ou une courbe propres à représenter la fonction dont il s'agit ; et l'on pourrait pousser la solution des problèmes jusqu'aux applications numériques.

Mais lors même que l'on n'atteindrait jamais ce but (à cause de la difficulté de se procurer des observations assez nombreuses et assez exactes, et aussi à cause des variations progressives que doit éprouver la loi de la demande, dans un pays qui n'est point encore arrivé à un état sensiblement stationnaire), il ne serait pas moins à propos d'introduire, au moyen d'un signe indéterminé, la loi inconnue de la demande, dans les combinaisons analytiques : car on sait que l'une des fonctions les plus importantes de l'analyse consiste précisément à assigner des relations déterminées entre des quantités dont les valeurs numériques et même les formes algébriques sont absolument inassignables.

D'une part, des fonctions inconnues peuvent cependant jouir de propriétés ou de caractères généraux qui sont connus, par exemple d'être indéfiniment croissantes ou décroissantes, ou d'être périodiques, ou de n'être réelles qu'entre de certaines limites. De semblables données, quelqu'imparfaites qu'elles paraissent, peuvent toutefois, en raison de leur généralité même, et à l'aide des signes propres à l'analyse, conduire à des relations également générales, qu'on aurait difficilement découvertes sans ce secours. C'est ainsi que, sans connaître la loi de décroissement des forces capillaires, et en partant du seul principe que ces forces sont insensibles à des distances sensibles, les géomètres ont démontré les lois générales des phénomènes de la capillarité, lois confirmées par l'observation.

D'autre part, l'analyse, en faisant voir quelles relations déterminées subsistent entre des quantités inconnues, réduit les inconnues au plus petit nombre possible, et guide l'observateur dans le choix des observations les plus propres à en faire découvrir les valeurs. Elle réduit et coordonne les documents statistiques ; elle diminue en même temps qu'elle éclaire les travaux des statisticiens.

Par exemple, on ne peut point assigner *a priori* de forme algébrique à la loi de mortalité ; on ne peut pas assigner davantage la forme de la fonction qui exprime la répartition de la population suivant les âges, dans une population stationnaire ; mais ces deux fonctions sont liées l'une à l'autre par une relation fort simple ; tellement que, dès que les observations statistiques auront permis de construire une table de mortalité, on pourra, sans recourir à des observations nouvelles, déduire très simplement de cette table celle qui exprime la proportion des divers âges au sein d'une population stationnaire, ou même au sein d'une population pour laquelle on connaît l'excès annuel des naissances sur les décès[1].

Qui doute que, dans la statistique de l'économie sociale, il n'y ait une foule de chiffres ainsi liés les uns aux autres par des rapports assignables, d'après lesquels on pourrait choisir le chiffre le plus facile à déterminer empiriquement, pour en déduire ensuite théoriquement tous les autres ?

22 Nous admettrons que la fonction $F(p)$ qui exprime la loi de la demande ou du débit est une fonction *continue*, c'est-à-dire une fonction qui ne passe pas soudainement d'une valeur à une autre, mais qui prend dans l'intervalle toutes les valeurs intermédiaires. Il en pourrait être autrement si le nombre des consommateurs était très limité : ainsi, dans tel ménage, on pourra consommer précisément la même quantité de bois de chauffage, que le bois soit à 10 francs ou à 15 francs le stère ; et l'on pourra réduire brusquement la consommation d'une quantité notable, si le prix du stère vient à dépasser cette dernière somme. Mais plus le marché s'étendra, plus les combinaisons des besoins, des fortunes ou même des caprices, seront variées parmi les

(1) L'*Annuaire du Bureau des longitudes* contient ces deux tables, la seconde déduite de la première comme on vient de le dire, et calculée dans l'hypothèse d'une population stationnaire.
L'ouvrage de Duvillard, intitulé *De l'influence de la petite vérole sur la mortalité*, contient beaucoup de beaux exemples de liaisons mathématiques entre des fonctions essentiellement empiriques.

consommateurs, plus la fonction F(p) approchera de varier avec p d'une manière continue. Si petite que soit la variation de p, il se trouvera des consommateurs placés dans une position telle que le léger mouvement de hausse ou de baisse imprimé à la denrée influera sur leur consommation, les engagera à s'imposer quelques privations, ou à réduire. leurs exploitations industrielles, ou à substituer une autre denrée à la denrée renchérie, par exemple, la houille au bois, ou l'anthracite à la houille. C'est ainsi que le thermomètre de la bourse accuse, par de très petites variations du cours, les variations les plus fugitives dans l'appréciation des chances auxquelles les fonds publics sont sujets, variations qui ne sont point une raison suffisante de vendre ni d'acheter pour la plupart de ceux qui ont leur fortune engagée dans les fonds publics.

Si la fonction F(p) est continue, elle jouira de la propriété commune à toutes les fonctions de cette nature, et sur laquelle reposent tant d'applications importantes de l'analyse mathématique : *les variations de la demande seront sensiblement proportionnelles aux variations du prix, tant que celles-ci seront de petites fractions du prix originaire*. D'ailleurs, ces variations seront de signes contraires, c'est-à-dire qu'à une augmentation de prix correspondra une diminution de la demande.

Supposons que, dans un pays comme la France, la consommation de sucre soit de 100 millions de kilogrammes, quand le prix est de 2 francs le kilogramme, et qu'on l'ait vue s'abaisser à 99 millions de kilogrammes, quand le prix s'est élevé à 2 francs 10 centimes On pourra, sans erreur notable, évaluer à 98 millions de kilogrammes la consommation qui correspondrait au prix de 2 francs 20 centimes et à 101 millions de kilogrammes la consommation correspondante au prix de 1 francs 90 centimes On conçoit combien ce principe, qui n'est que la conséquence mathématique de la continuité des fonctions, peut faciliter les applications de la théorie, soit en simplifiant les expressions analytiques des lois qui régissent le mouvement des valeurs, soit en réduisant le nombre des données qu'il faudra emprunter à l'expérience, si la théorie devient assez avancée pour se prêter à des déterminations numériques.

N'oublions pas d'observer que le principe énoncé ci-dessus peut à la rigueur admettre des exceptions, par la raison qu'une fonction continue peut, en quelques points de son cours, éprouver des solutions de continuité ; mais, de même que le frottement use les aspérités et adoucit les contours, ainsi la triture du commerce tend à supprimer ces cas exceptionnels, en même temps que le mécanisme commercial modère les variations dans les prix et tend à les maintenir entre les limites qui facilitent l'application de la théorie.

23 Pour définir avec exactitude la quantité D, ou la fonction F(p) qui en est l'expression, nous avons admis que D représentait la quantité débitée *annuellement*, dans l'étendue du pays ou du marché[1] que l'on considère. En effet, l'année est l'unité naturelle du temps, surtout quand il s'agit de recherches qui ont trait à l'économie sociale. C'est dans cette période que se reproduisent tous les besoins de l'homme, toutes les ressources qu'il tire de la nature et de son travail. Cependant, le prix d'une denrée peut varier notablement dans le cours d'une année, et, à la rigueur, la loi de la demande peut varier aussi dans le même intervalle, si le pays éprouve un mouvement rapide de progrès ou de décadence. En conséquence, il faut, pour plus d'exactitude, concevoir que dans l'expression $F(p)$, p désigne le prix moyen annuel, et que la courbe qui représente la fonction F est elle-même une moyenne entre toutes celles qui représenteraient la fonction à diverses époques de l'année. Mais, au reste, cette extrême précision ne deviendrait nécessaire que si l'on pouvait se proposer de passer à des applications numériques, et elle demeure superflue dans les recherches qui n'ont pour objet que d'obtenir une expression générale des résultats moyens, indépendants des oscillations périodiques.

24 Puisque la fonction $F(p)$ est continue, la fonction $pF(p)$, qui exprime la valeur totale de la quantité débitée annuellement le sera aussi. Cette fonction deviendrait nulle si p était nul, puisque la consommation d'une denrée reste toujours finie, même dans l'hypothèse d'une absolue gratuité ; ou, en d'autres termes, on peut toujours assigner par la pensée au nombre p une valeur assez petite pour que le produit $pF(p)$ soit sensiblement nul. La fonction $pF(p)$ s'évanouit encore quand p devient infini, ou en d'autres termes on peut toujours assigner par la pensée au nombre p une valeur assez grande pour que la denrée cesse d'être demandée et produite à ce prix. Donc, puisque la fonction $pF(p)$ va d'abord en croissant avec p, puis finalement en décroissant, il y a une valeur de p qui la rend un maximum, et qui est donnée par l'équation

$$(1) \qquad F(p) + pF'(p) = o,$$

F' désignant, suivant la notation de Lagrange, le coefficient différentiel de la fonction F.

Si l'on trace la courbe *anb* (fig. 1) dont les abscisses *oq* et les ordonnées *qn* représentent les variables p et D, la racine de l'équation (1) sera l'abscisse du point *n* pour lequel le triangle *ont*, formé par la tangente *nt* et par le rayon vecteur *on*, est isocèle, de sorte qu'on a $oq = qt$.

Or, en admettant qu'il soit impossible de déterminer empiriquement pour chaque denrée la fonction $F(p)$, il s'en faut bien que les mêmes obstacles

(1) On sait que les économistes entendent par *marché*, non pas un lieu déterminé où se consomment les achats et les ventes, mais tout un territoire dont les parties sont unies par des rapports de libre commerce, en sorte que les prix s'y nivellent avec facilité et promptitude.

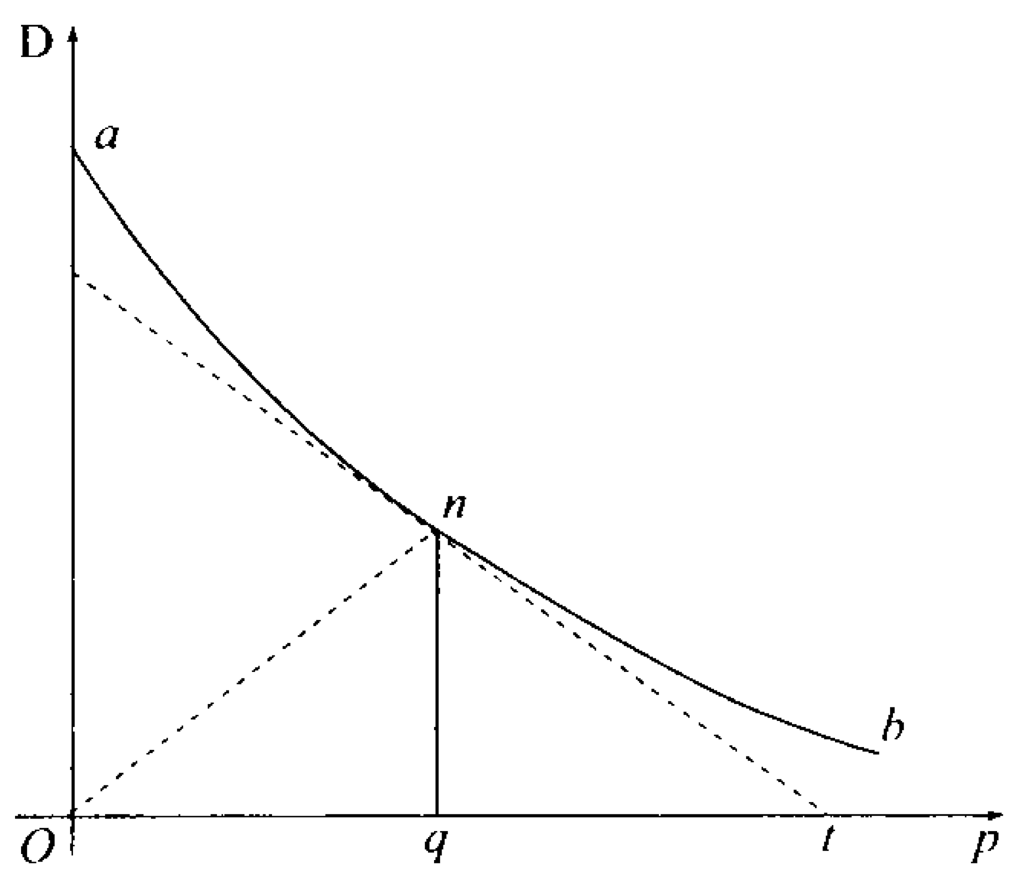

Figure 1

s'opposent à la détermination approximative de la valeur de p qui satisfait à l'équation (1) ou qui rend le produit $pF(p)$ un maximum. La construction d'une table où l'on trouverait ces valeurs serait le travail le plus propre à préparer la solution pratique et rigoureuse des questions qui se rattachent à la théorie des richesses.

Mais, lors même que l'on ne pourrait pas tirer des documents statistiques la valeur de p propre à rendre le produit $pF(p)$ un maximum, il serait facile de savoir, au moins pour toutes les denrées auxquelles on a essayé d'étendre la statistique commerciale, si le prix courant tombe en-deçà ou au-delà de cette valeur. Supposons que le prix étant devenu $p + \Delta p$, la consommation annuelle, accusée par des documents statistiques tels que les registres des douanes, soit devenue $D - \Delta D$, selon que l'on aura

$$\frac{\Delta D}{\Delta p} < \frac{D}{p} \,, \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta D}{\Delta p} > \frac{D}{p},$$

l'accroissement de prix Δp fera augmenter ou diminuer le produit $pF(p)$; et l'on saura conséquemment si les deux valeurs $p, p\Delta + p$ (Δp étant censé être une petite fraction de p) tombent en-deçà ou au-delà de la valeur qui porte au maximum le produit en question.

On devra donc demander d'abord à la statistique commerciale de distribuer les denrées d'une haute importance économique en deux catégories, selon que leurs prix courants restent inférieurs ou supérieurs à la valeur productrice du maximum de $pF(p)$. Nous verrons que beaucoup de problèmes économiques comportent des solutions différentes, selon que la denrée dont il s'agit appartient à l'une ou à l'autre de ces deux catégories.

25 On sait, par la théorie des maxima et minima, que l'équation (1) convient aux valeurs de p qui rendent $pF(p)$ un minimum, comme à celles qui rendent ce produit un maximum. Le raisonnement employé au commencement de l'article précédent montre bien que la fonction $pF(p)$ a nécessairement un maximum, mais elle pourrait en avoir plusieurs et passer dans l'intervalle par des valeurs minima. La racine de l'équation (1) correspond à un maximum ou à un minimum selon que l'on a

$$2F'(p) + pF''(p) < \text{ou} > o,$$

ou bien, en substituant pour p sa valeur, et en ayant égard au signe essentiellement négatif de $F'(p)$,

$$2[F'(p)]^2 - F(p) \cdot F''(p) > \text{ ou } < o.$$

Par conséquent, lorsque $F''(p)$ est négatif, ou lorsque la courbe $D = F(p)$ tourne sa concavité du côté de l'axe des abscisses, il est impossible qu'il y ait un minimum, ni plus d'un maximum. Dans le cas contraire, l'existence de plusieurs minima et de plusieurs maxima n'est pas démontrée impossible.

Mais si l'on cesse d'envisager la question sous un point de vue purement abstrait, on reconnaît promptement combien il est peu probable que dans l'intervalle des limites entre lesquelles peut osciller, la valeur de p, la fonction $pF(p)$ passe par plusieurs maxima et par des minima intermédiaires ; et, comme nous pouvons nous dispenser d'avoir égard aux maxima, s'il en existe, qui tombent hors de ces limites, toutes les questions sont les mêmes que si la fonction $pF(p)$ n'admettait qu'un seul maximum. Il s'agit toujours essentiellement de savoir si, dans l'étendue des limites entre lesquelles p peut osciller, la fonction $pF(p)$ est croissante ou décroissante pour des valeurs croissantes de p.

On doit, dans toute exposition, procéder du simple au composé : l'hypothèse la plus simple, quand on se propose de rechercher d'après quelles lois les prix s'établissent, est celle du monopole, en prenant ce mot dans le sens le plus absolu, ce qui suppose que la production de la denrée est dans une seule main. Cette hypothèse n'est pas purement fictive ; elle se réalise dans certains cas ; et d'ailleurs, après que nous l'aurons étudiée, nous pourrons analyser avec plus de précision les effets de la concurrence des producteurs.

Chapitre 5

DU MONOPOLE

26 Supposons, pour la commodité du langage, qu'un homme se trouve propriétaire d'une source minérale, à laquelle on vient de reconnaître des propriétés salutaires qu'aucune autre ne possède. Il pourrait sans doute fixer à 100 francs le prix du *litre* de cette eau ; mais il s'apercevrait bien vite, à la rareté des demandes, que ce n'est pas le moyen de tirer grand parti de sa propriété. Il abaissera donc successivement le prix du litre jusqu'au terme qui lui donnera le plus grand profit possible ; c'est-à-dire que, si $F(p)$ désigne la loi de la demande, il finira, après divers tâtonnements, par adopter la valeur de p qui rend le produit $pF(p)$ un maximum, ou qui est déterminée par l'équation

$$(1) \qquad F(p) + pF'(p) = o.$$

Le produit

$$pF(p) = \frac{[F(p)]^2}{-F'(p)}$$

sera la rente annuelle du propriétaire de la source, et cette rente ne dépendra que de la nature de la fonction F.

Pour que l'équation (1) soit applicable, il faut admettre qu'à la valeur de p qui s'en déduit, correspond une valeur de D que peut livrer annuellement le propriétaire de la source, ou qui n'excède pas le produit annuel de cette source. S'il en était autrement, le propriétaire ne pourrait, sans se porter dommage, abaisser le prix du litre autant qu'il serait de son intérêt de le faire, dans le cas d'une abondance plus grande. La source produisant annuellement un nombre de litres exprimé par Δ, si l'on tire p de la relation $F(p) = \Delta$, on aura nécessairement le prix du litre tel qu'il doit s'établir définitivement par suite de la concurrence des acheteurs.

27 Dans l'exemple choisi pour type, comme le plus simple de tous, le producteur n'a à supporter aucun frais de production, ou ses frais peuvent être considérés comme insensibles. Passons à celui d'un homme qui posséderait le secret d'une préparation pharmaceutique, d'une eau minérale artificielle, pour laquelle il faudrait payer les matières premières et la main-d'œuvre. Ce ne sera plus la fonction $pF(p)$, ou le *produit brut* annuel, que le producteur devra s'efforcer de porter à sa valeur *maximum*, mais le *produit net*, ou la fonction $pF(p)-\varphi(D)$, $\varphi(D)$ désignant les frais qu'exige la fabrication d'un nombre de litres égal à D. Puisque D est lié à p par la relation $D = F(p)$, la fonction complexe $pF(p)-\varphi(D)$ peut être considérée comme dépendant implicitement de la seule variable p, quoique en général les frais de production soient une fonction explicite, non du prix de la denrée produite, mais de la quantité produite. En conséquence, le prix p auquel le producteur doit porter la denrée, sera déterminé par l'équation

$$\text{(2)} \qquad D + \frac{dD}{dp}\left[p - \frac{d \cdot \varphi(D)}{dD}\right] = o.$$

Ce prix déterminera à son tour le produit net annuel ou le revenu de l'inventeur, la valeur capitale de son secret ou de son *fonds productif*, dont la propriété, aussi bien que celle d'un fonds de terre ou d'un meuble corporel, est garantie par les lois et peut circuler dans le commerce. Si cette valeur est nulle ou sensiblement nulle, le propriétaire du fonds productif n'en retirera aucun profit pécuniaire ; il l'abandonnera sans rétribution, ou pour une rétribution minime, au premier exploitateur. Le prix du litre ne représentera que les valeurs des matières premières, les salaires ou profits des agents qui ont concouru à le fabriquer et à en procurer la vente, avec l'intérêt des capitaux nécessaires à l'exploitation.

28 Les termes de notre exemple s'opposent à ce qu'on admette, dans ce cas, une limitation des forces productives, par suite de laquelle le producteur ne pourrait abaisser le prix au taux qui, d'après la loi de la demande, donnerait le produit net *maximum*. Mais, dans une foule d'autres cas, une limitation semblable peut avoir lieu, et si Δ exprime la limite que la production ou la demande ne peuvent pas dépasser, le prix sera déterminé par la relation $F(p) = \Delta$, comme s'il n'y avait pas de frais de production. Ces frais ne sont alors nullement supportés par les consommateurs ; ils diminuent seulement le revenu du producteur. Ils pèsent, non pas précisément sur le propriétaire (qui, à moins d'être inventeur au premier occupant, ce qui rentre dans les circonstances initiales dont la théorie n'a point à s'occuper, a acquis, par lui ou par ses auteurs, la propriété en raison du revenu), mais sur la propriété même. Une diminution dans les frais ne tournera qu'au profit du producteur, tant qu'il n'en résultera pas pour lui la faculté de produire davantage.

29 Revenons au cas où cette faculté lui est acquise, et où le prix p est déterminé en conséquence de l'équation (2).

Nous observerons que le coefficient $\frac{d \cdot \varphi(\mathrm{D})}{d\mathrm{D}}$, qui peut d'ailleurs croître ou décroître quand D augmente, doit être supposé positif, car il serait absurde que les frais *absolus* de production décrussent quand la production s'accroît. Nous ferons remarquer aussi que l'on a nécessairement $p > \frac{d \cdot \varphi(\mathrm{D})}{d\mathrm{D}}$, car $d\mathrm{D}$ étant l'accroissement de la production, $d \cdot \varphi(\mathrm{D})$ est l'accroissement des frais, $pd\mathrm{D}$ est l'accroissement du produit brut ; et, quelle que soit l'abondance de la source productrice, le producteur s'arrêtera toujours quand l'accroissement de dépense surpassera l'accroissement de produit. C'est aussi ce qui résulte surabondamment de la forme de l'équation (2), attendu que D est toujours une quantité positive, et $\frac{d\mathrm{D}}{dp}$ une quantité négative.

Dans la suite de nos recherches, nous aurons rarement occasion de considérer directement la fonction $\varphi(\mathrm{D})$, mais seulement son coefficient différentiel $\frac{d\varphi(\mathrm{D})}{d\mathrm{D}}$ que nous désignerons par la caractéristique $\varphi'(\mathrm{D})$. Ce coefficient différentiel est une nouvelle fonction de D, dont la forme exerce la plus grande influence sur la solution des principaux problèmes de la science économique.

La fonction $\varphi'(\mathrm{D})$ est, selon la nature des forces productrices et des denrées produites, susceptible de croître ou de décroître quand D augmente.

Pour ce qu'on appelle proprement *produits manufacturés*, il arrive d'ordinaire que les frais sont proportionnellement moindres quand la production s'accroît, ou, en d'autres termes, que D croissant, $\varphi'(\mathrm{D})$ est une fonction décroissante. Ceci tient à une organisation plus avantageuse du travail, à des remises sur les prix des matières premières, lorsqu'on les achète en gros, enfin à l'atténuation de ce que les producteurs appellent *les frais généraux*. Il peut cependant arriver, même dans l'exploitation des produits de cette nature, que l'exploitation poussée au-delà de certaines limites, provoque le renchérissement des matières premières et de la main-d'œuvre, au point que la fonction $\varphi'(\mathrm{D})$ redevienne croissante avec D.

Quand il s'agit de l'exploitation des terres arables, des mines, des carrières, de la richesse éminemment foncière, la fonction $\varphi'(D)$ est croissante avec D ; et c'est, comme nous ne tarderons pas à le voir, en raison de cette seule circonstance, que les terres, les mines, les carrières donnent un revenu net à leurs propriétaires, bien avant qu'on n'ait tiré du sol tout ce qu'il peut physiquement produire, et nonobstant la grande division de ces propriétés, qui établit entre les producteurs une concurrence que l'on peut regarder comme indéfinie. Au contraire, les fonds productifs, placés dans des circonstances telles que, D croissant, $\varphi'(D)$ décroisse, ne peuvent donner un revenu net ou un *fermage* que dans le cas d'un monopole proprement dit, ou d'une concurrence assez bornée pour que les effets d'un monopole exercé collectivement soient encore sensibles.

30 Entre les deux cas où la fonction $\varphi'(D)$ est croissante et décroissante, vient naturellement se placer celui où cette fonction se réduit à une constante, les frais étant constamment proportionnels à la production, et l'équation (2) prenant la forme

$$D + \frac{dD}{dp}(p - g) = o.$$

Il faut encore signaler le cas où $\varphi(D)$ est constant, et φ nul, en sorte que le prix est le même que si les frais n'existaient pas. Ce cas est plus fréquent qu'on ne le soupçonnerait au premier aperçu, surtout lorsqu'il s'agit d'exploitation en monopole, et qu'on donne à la valeur du nombre D l'extension qu'elle comporte. Pour une entreprise théâtrale, par exemple, D exprime le nombre des billets placés, et les frais de l'entreprise restent sensiblement les mêmes, quelle que soit l'affluence des spectateurs. Pour le péage d'un pont, qui est un autre fonds productif en monopole, D exprime le nombre des passagers ; et les frais d'entretien, de garde, de comptabilité resteront les mêmes, que le passage soit plus ou moins fréquenté. En pareil cas, la constante g s'évanouit, l'équation (2) se confond avec l'équation (1), et le prix p est déterminé de la même manière que si les frais n'existaient pas.

31 Il est fort naturel d'admettre que, quand les frais de production s'accroissent, le prix fixé par le monopoleur, en conséquence de l'équation (2), s'accroît pareillement : cependant, en y réfléchissant, on verra qu'une proposition si importante a besoin d'être appuyée d'une démonstration raisonnée ; et, de plus, cette démonstration nous conduira à une remarque également importante, que le calcul seul peut établir d'une manière incontestable.

Soit donc p_o la racine de l'équation (2), que nous mettrons sous la forme

$$\text{(3)} \qquad F(p) + F'(p)[p - \psi(p)] = o,$$

à cause que $\varphi'(\mathrm{D}) = \varphi'[\mathrm{F}(p)]$ peut être plus simplement remplacé par la caractéristique $\psi(p)$; et supposons que la fonction $\psi(p)$ venant à varier d'une quantité u, et devenant $\psi(p)+u$, p devienne $p_0+\delta$. Si l'on néglige les carrés et les puissances supérieures des variations u, δ, l'équation (3) établira entre ces deux variations la relation suivante :

$$(4) \qquad \{\mathrm{F}'(p_0)[2-\psi'(p_0)]+\mathrm{F}''(p_0)[p_0-\psi(p_0)]\}\delta - u\,\mathrm{F}'(p_0) = o\ ;$$

le coefficient de δ dans cette relation étant la dérivée par rapport à p du premier membre de l'équation (3), dans laquelle dérivée on a donné à p la valeur p_0.

Or, ce coefficient de δ est nécessairement négatif, d'après la théorie connue des maxima et minima, puisque, s'il était positif, la racine p_0 de l'équation (3) correspondrait au minimum de la fonction $p\mathrm{F}(p)-\varphi(\mathrm{D})$, et non pas, comme cela doit être au maximum de cette même fonction. D'un autre côté, $\mathrm{F}'(p)$ est une quantité négative de sa nature. Donc, la variation δ est généralement de même signe que la variation u.

32 Ce résultat se trouve ainsi démontré, à la faveur de la supposition que les variations u, δ, sont des nombres très petits, dont il est permis de négliger sans erreur sensible les carrés et les produits ; mais on peut, moyennant un raisonnement bien simple, s'affranchir de cette restriction. En effet, quel que soit l'accroissement de frais désigné par u, on peut suppposer que la fonction $\psi(p)$ passe de la valeur $\psi(p)$ à la valeur $\psi(p)+u$ par une suite d'incréments très petits et de même signe u_1, u_2, u_3, etc. En même temps, p passera de la valeur p_0 à la valeur $p_0+\delta$, par une suite d'incréments correspondants et également très petits, δ_1, δ_2, δ_3, etc. ; δ_1 sera (d'après ce qui précède) de même signe que u_1, δ_2 de même signe que u_2, et ainsi de suite : donc

$$\delta = \delta_1+\delta_2+\delta_3+\text{etc.}$$

sera de même signe que

$$u = u_1+u_2+u_3+\text{etc.}$$

On doit remarquer ce tour de démonstration auquel nous aurons souvent occasion de recourir.

33 On tire de l'équation (4) :

$$\frac{\delta}{u} = \frac{\mathrm{F}'(p_0)}{\mathrm{F}'(p_0)[2-\psi'(p_0)]+\mathrm{F}''(p_0)[p_0-\psi(p_0)]},$$

et, puisque la fraction composant le second membre a ses deux termes négatifs, on en conclut que δ sera numériquement > ou < u, selon qu'on aura :

$$-F'(p_0) \gtrless -F'(p_0)[2-\psi'(p_0)]-F''(p_0)[p_0-\psi(p_0)],$$

$$\text{ou}\ \ F'(p_0)[1-\psi'(p_0)]+F''(p_0)[p_0-\psi(p_0)] \gtrless o\cdot$$

condition qui peut encore se remplacer par

$$[F'(p_0)]^2[1-\psi'(p_0)]-F(p_0)\cdot F''(p_0) \gtrless o\cdot$$

en ayant égard à la valeur de $p_0-\psi(p_0)$, déduite de l'équation (3).

34 Prenons un exemple fictif pour rendre ceci plus sensible par des applications numériques. Supposons que la fonction $\varphi'(D)$ soit d'abord nulle, et qu'ensuite elle se réduise à une constante g. La première valeur de p, ou p_0, sera donnée par l'équation

$$F(p)+p\ F'(p)=o\ ;$$

la seconde valeur de p, que nous appellerons p', sera donnée par une autre équation

$$(5)\qquad F(p)+(p-g)F'(p)=o\cdot$$

Supposons, en premier lieu, $F(p)=\dfrac{a}{b+p^2}$; les valeurs de p_0, p', d'après les équations précédentes, seront respectivement :

$$p_0=\sqrt{b},\ p'=g+\sqrt{b+g^2},=\ g+\sqrt{p_0^2+g^2}.$$

(la racine de l'équation (5), qui donnerait pour p' une valeur négative, devant nécessairement être exclue). Dans ce cas, on voit que l'excès de p' sur p_0 est supérieur à g, ou au montant des nouveaux frais imposés à la production. Si, par exemple, les nouveaux frais sont un dixième du prix primitif, ou si $g=\dfrac{1}{10}p_0$, on aura $p'=p_0\cdot 1{,}1488$; le renchérissement sera, à très peu près, d'un dixième et demi ; l'ancien prix étant de 20 francs, et les frais de 2 francs, le nouveau prix sera 23 francs, ou, plus exactement, 22 francs 97 centimes

Supposons, en second lieu, $F(p)=\dfrac{a}{b+p^3}$, on aura

$$p_0=\sqrt[3]{\frac{b}{2}}\ ;$$